7　種々の方程式の問題

59

解と係数の関係より，

$\alpha+\alpha+(-1)=a \quad \therefore a=2\alpha-1$　・・・①

$\alpha\cdot\alpha+(-1)\cdot\alpha+(-1)\cdot\alpha=3 \quad \therefore (\alpha+1)(\alpha-3)=0 \quad \alpha\neq-1$ より，$\alpha=3$　・・・②

$-1\cdot\alpha\cdot\alpha=-b \quad \therefore b=\alpha^2$　・・・③

①，②，③より，$a=5,\ b=9,\ \alpha=3$

60

$x^3+(2m-7)x^2+(9-m)x-m-3=(x-1)\{x^2+2(m-3)x+m+3\}$ より，

$(x-1)\{x^2+2(m-3)x+m+3\}=0$

よって，$x^2+2(m-3)x+m+3=0$ が 1 以外の異なる 2 つの正の解をもてばよい。

この 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると，$\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$

よって，解と係数の関係より，$-2(m-3)>0$，$m+3>0 \quad \therefore -3<m<3$　・・・①

判別式を D とすると，異なる 2 実数解をもつから，

$\frac{D}{4}=(m-3)^2-m+3=(m-1)(m-6)>0 \quad \therefore m<1$ または $6<m$　・・・②

$x=1$ は解ではないから，$1+2(m-3)\cdot1+m+3\neq0 \quad \therefore m\neq\frac{2}{3}$　・・・③

m は①，②，③を同時に満たすから，$-3<m<\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}<m<1$

61

与式を整理すると，$\frac{1}{3}(6x^3-18kx^2-4x-27)-i(3x^2-2)=0$

よって，2 つの異なる 2 実数解は $6x^3-18kx^2-4x-27=0$ と $3x^2-2=0$ を満たす。

$3x^2-2=0$ より，$3x^2=2$

よって，

$$\begin{aligned}6x^3-18kx^2-4x-27&=6x^3-6k\cdot3x^2-2x\cdot2-27\\&=6x^3-6k\cdot2-2x\cdot3x^2-27\\&=-3(4k+9)\end{aligned}$$

より，$4k+9=0 \quad \therefore k=-\frac{9}{4}$

また，$3x^2=2$ より，2 つの実数解は $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

逆に，$k=-\frac{9}{4}$ とすると，2 つの実数解は $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

ゆえに，

必要十分条件は$k=-\dfrac{9}{4}$

2 つの実数解は$x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

62

(1)

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=2^2-2\cdot 3\\&=-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3&=(a^3+b^3+c^3-3abc)+3abc\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc\\&=2(-2-3)+3\cdot 2\\&=-4\end{aligned}$$

(2)

解と係数の関係より，$a+b+c=-A,\ ab+bc+ca=B,\ abc=-C \quad \therefore A=-2,\ B=3,\ C=-2$

(3)

(2)より，$a,\ b,\ c$ は$x^3-2x^2+3x-2=0$ の解である。

よって，

$$\begin{aligned}a^5&=(a^3-2a^2+3a-2)(a^2+2a+1)-2a^2+a+2\\&=-2a^2+a+2\end{aligned}$$

同様に，$b^5=-2b^2+b+2,\ c^5=-2c^2+c+2$

$$\begin{aligned}\therefore a^5+b^5+c^5&=-2(a^2+b^2+c^2)+a+b+c+6\\&=-2\cdot(-2)+2+6\\&=12\end{aligned}$$

63

(1)

$\sqrt{\dfrac{28}{27}}=p$ とおくと，

$$\begin{aligned}\alpha^3&=\left\{(p+1)^{\frac{1}{3}}-(p-1)^{\frac{1}{3}}\right\}^3\\&=\left\{(p+1)^{\frac{1}{3}}\right\}^3-\left\{(p-1)^{\frac{1}{3}}\right\}^3-3\left\{(p+1)^{\frac{1}{3}}\right\}^2(p-1)^{\frac{1}{3}}+3(p+1)^{\frac{1}{3}}\left\{(p-1)^{\frac{1}{3}}\right\}^2\\&=(p+1)-(p-1)-3(p+1)^{\frac{2}{3}}(p-1)^{\frac{1}{3}}+3(p+1)^{\frac{1}{3}}(p-1)^{\frac{2}{3}}\\&=2-3(p+1)^{\frac{1}{3}}(p-1)^{\frac{1}{3}}\left\{(p+1)^{\frac{1}{3}}-(p-1)^{\frac{1}{3}}\right\}\end{aligned}$$

$=2-3\left(p^2-1\right)^{\frac{1}{3}}\alpha$

$=2-3\left(\dfrac{28}{27}-1\right)^{\frac{1}{3}}\alpha$

$=2-3\cdot\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\alpha$

$=2-3\cdot\dfrac{1}{3}\alpha$

$=2-\alpha$

よって，$\alpha^3+\alpha-2=0$

ゆえに，整数を係数とする 3 次方程式$x^3+x-2=0$はαを解にもつ。

(2)

$x^3+x-2=(x-1)\left(x^2+x+2\right)$より，$(x-1)\left(x^2+x+2\right)=0$　$\therefore x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

αは$x^3+x-2=0$の実数解だから，$\alpha=1$

64

$ab=2,\ a^3+b^3=6$とおくと，

$x^3-6x+6=x^3-3abx+a^3+b^3$

$=(x+a+b)\left(x+a\omega^2+b\omega\right)\left(x+a\omega+b\omega^2\right)$

より，

方程式の解は$x=-(a+b),\ -a\omega-b\omega^2,\ -a\omega^2-b\omega$

ここで，$ab=2,\ a^3+b^3=6$を満たす$a,\ b$を求めると，

$ab=2$より，$a^3b^3=8$

よって，$a^3,\ b^3$は方程式$t^2-6t+8=0$すなわち$(t-2)(t-4)=0$の 2 解である。

ゆえに，$\left(a^3,\ b^3\right)=\left(\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4}\right),\left(\sqrt[3]{4},\ \sqrt[3]{2}\right)$

よって，$x=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ -\sqrt[3]{2}\omega^2-\sqrt[3]{4}\omega,\ -\sqrt[3]{2}\omega-\sqrt[3]{4}\omega^2$

補足

$x^3-3abx+a^3+b^3=x^3+a^3+b^3-3abx$

$=(x+a+b)\left(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab\right)$

$=(x+a+b)\left\{x^2-(a+b)x+a^2+b^2-ab\right\}$

$=(x+a+b)\left[x^2+\left\{a\left(\omega^2+\omega\right)+b\left(\omega^2+\omega\right)\right\}x+a^2\omega^3+b^2\omega^3+ab\left(\omega^2+\omega\right)\right]$

$=(x+a+b)\left[x^2+\left(a\omega^2+a\omega+b\omega^2+b\omega\right)x+a^2\omega^2\cdot\omega+b^2\omega^2\cdot\omega+ab\left(\omega^2+\omega^4\right)\right]$

$=(x+a+b)\left[x^2+\left(a\omega^2+a\omega+b\omega^2+b\omega\right)x+\left(a\omega^2+b\omega\right)\left(b\omega^2+a\omega\right)\right]$

$=(x+a+b)\left[x^2+\left\{\left(a\omega^2+b\omega\right)+\left(b\omega^2+a\omega\right)\right\}x+\left(a\omega^2+b\omega\right)\left(b\omega^2+a\omega\right)\right]$

$=(x+a+b)\left(x+a\omega^2+b\omega\right)\left(x+b\omega^2+a\omega\right)$

65

$x^3-(2a^2+b)x-4ab=(x^2-2ax-b)(x+2a)+2a(ax-b)$

共通解を α とすると，$\alpha^3-(2a^2+b)\alpha-4ab=0$，$\alpha^2-2a\alpha-b=0$ より，$2a(a\alpha-b)=0$

$a=0$ とすると，$x^2-b=0$ の解の 1 つだけが $x^3-bx=0$ の解でなければならないが，

$x^3-bx=x(x^2-b)=0$ より，$x^2-b=0$ の異なる 2 解とも $x^3-bx=0$ の解になってしまう。

よって，不適

ゆえに，$a\neq 0$

$a\alpha-b=0$ とすると，$a\neq 0$ より，$\alpha=\dfrac{b}{a}$　・・・①

これと $\alpha^2-2a\alpha-b=0$ より，$\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-2a\cdot\dfrac{b}{a}-b=0$　すなわち $\dfrac{b}{a^2}(b-3a^2)=0$

これと $b\neq 0$ より，必要条件は $b=3a^2$

逆に $b=3a^2$ とすると，

$x^2-2ax-b=x^2-2ax-3a^2=(x+a)(x-3a)$ より，

$x^2-2ax-b=0$ の解は $x=-a,\ 3a$

一方，$x^3-(2a^2+b)x-4ab=x^3-5a^2x-12a^3=0$ は $x=-a$ を解にもたないが，$x=3a$ を解にもつ。

よって，$b=3a^2$ は十分条件である。

ゆえに，必要十分条件は $b=3a^2$

また，これを①に代入することにより，共通解 $\alpha=3a$

66

(1)

$f(f(x))-x=a\{f(x)\}^2-b-x$

$a\{f(x)\}^2-x-b$ の $f(x)-x$ で割ると，

$$
\begin{aligned}
a\{f(x)\}^2-x-b&=\{f(x)-x\}\{af(x)+ax\}+ax^2-b-x\\
&=a\{f(x)-x\}\{f(x)+x\}+f(x)-x\\
&=\{f(x)-x\}\{af(x)+ax+1\}
\end{aligned}
$$

よって，$f(f(x))-x=\{f(x)-x\}\{af(x)+ax+1\}$

ゆえに，$f(f(x))-x$ は $f(x)-x$ で割り切れる。

(2)

(1)より，

$$
\begin{aligned}
f(f(x))-x&=\{f(x)-x\}\{af(x)+ax+1\}\\
&=(ax^2-x-b)(a^2x^2+ax-ab+1)
\end{aligned}
$$

よって，

$f(f(x))-x=0$ が異なる 4 つの実数解をもつための必要十分条件は

$ax^2-x-b=0$ と $a^2x^2+ax-ab+1=0$ それぞれが異なる 2 実数解もち，かつ共通解をもたないことである。

異なる 2 実数解をもつための必要十分条件は判別式が正であることだから，

満たすべき条件は，

$ax^2-x-b=0$ では，判別式$=1+4ab>0$

$a>0,\ b>0$ より，$ax^2-x-b=0$ はこれを満たす。よって，異なる 2 実数解をもつ。

$a^2x^2+ax-ab+1=0$ では，判別式$=a^2-4a^2(-ab+1)=a^2(4ab-3)>0$

よって，$4ab-3>0$　すなわち $ab>\dfrac{3}{4}$　・・・①

$ax^2-x-b=0$ と $a^2x^2+ax-ab+1=0$ が共通解 α をもつとすると，

$a\alpha^2-\alpha-b=0$，$a^2\alpha^2+a\alpha-ab+1=0$，$a^2\alpha^2+a\alpha-ab+1=a(a\alpha^2-\alpha-b)+2a\alpha+1$

より，$2a\alpha+1=0$　$\therefore \alpha=-\dfrac{1}{2a}$

これを $a\alpha^2-\alpha-b=0$ に代入し，整理すると，$\dfrac{3}{4a}-b=0$　$\therefore ab=\dfrac{3}{4}$

よって，共通解をもたない条件は $ab\neq\dfrac{3}{4}$　・・・②

①かつ②より，求める条件は $ab>\dfrac{3}{4}$

67

解法 1：解と係数の関係から求める

A を $f(x)=0$ の複素数解とすると，

$f(A)=A^3+aA^2+bA+c=0$

$$
\begin{aligned}
f(\overline{A})&=(\overline{A})^3+a(\overline{A})^2+b\overline{A}+c\\
&=\overline{A^3}=a\overline{A^2}+b\overline{A}+c\\
&=\overline{A^3+aA^2+bA+c}\\
&=\overline{0}\\
&=0
\end{aligned}
$$

よって，共役複素数 $\overline{A}$ も $f(x)$ の解である。

また，A が虚数ならば $A\neq\overline{A}$，実数ならば $A=\overline{A}$

これと 3 次方程式の複素数解の数は，重解を 2 つの解とすると，3 であることから，

$f(x)=0$ は(B)より，互いに共役な 2 つの虚数解と 1 つの実数解をもつ。

そこで，1 つの虚数解を $p+qi$ （p,q は実数，$q>0$）とおき，これを α とし，

実数解を β とすると，$f(x)=0$ の解は α すなわち $p+qi$，$\overline{\alpha}$ すなわち $p-qi$，β の 3 つ。

よって，解と係数の関係により，

$f(x)=x^3-(\alpha+\overline{\alpha}+\beta)x^2+(\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\beta\alpha)x-\alpha\overline{\alpha}\beta$　・・・①

また，

$$
\begin{aligned}
\alpha^3&=(p+qi)^3=p^3+(qi)^3+3pqi(p+qi)\\
&=p^3-q^3i+3p^2qi-3pq^2\\
&=p(p^2-3q^2)+q(3p^2-q^2)i
\end{aligned}
$$

$(\overline{\alpha})^3=\overline{\alpha^3}=p(p^2-3q^2)-q(3p^2-q^2)i$

β^3 は実数だから，条件より，$\beta^3=\beta$　$\therefore \beta=-1,\ 0,\ 1$　・・・②

α^3 と $(\overline{\alpha})^3$ については，

α^3 と $(\overline{\alpha})^3$ が実数ならば $\alpha^3=(\overline{\alpha})^3=\beta$

α^3 と $(\overline{\alpha})^3$ が虚数ならば（$\alpha^3=\alpha$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\overline{\alpha}$）または（$\alpha^3=\overline{\alpha}$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\alpha$）

そこで, 条件を満たす 3 次式を $\alpha^3=(\overline{\alpha})^3=\beta$，$\alpha^3=\alpha$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\overline{\alpha}$，$\alpha^3=\overline{\alpha}$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\alpha$

の 3 つの場合に分けて求めることにする。

$\alpha^3=(\overline{\alpha})^3=\beta$ の場合

　虚部 $q(3p^2-q^2)=0\ (q>0)$ より，$3p^2-q^2=0$　$\therefore q^2=3p^2$　・・・③

　これを実部 $p(p^2-3q^2)$ に代入すると，$-8p^3$　$\therefore -8p^3=\beta$

　これと②より，$-8p^3=-1,\ 0,\ 1$

　よって，$(\beta,\ p)=\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right),\ (0,\ 0),\ \left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$

$(\beta,\ p)=\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

③より，$q^2=\dfrac{3}{4}$　$\therefore q=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ (\because q>0)$

よって，$(\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta)=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1\right)$

これを①に代入し計算することにより，$f(x)=x^3+1$　・・・④

$(\beta,\ p)=(0,\ 0)$ のとき

②より，$q=0$ となり，$p\pm qi$ が虚数であることに反する。よって，不適。

$(\beta,\ p)=\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

②より，$q^2=\dfrac{3}{4}$　$\therefore q=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$(\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta)=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ 1\right)$

これを①に代入し計算することにより，$f(x)=x^3-1$　・・・⑤

$\alpha^3=\alpha$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\overline{\alpha}$ の場合

$p=p(p^2-3q^2)$ かつ $q=q(3p^2-q^2)$ が成り立つ。

$p=p(p^2-3q^2)$ において，$p=0$ とすると，$q=q(3p^2-q^2)$ は $q=-q^3$ となる。

ところが $q>0$ より，$q=-q^3$ は成り立たない。よって，不適。

ゆえに，$p\neq 0$ で，このとき，$q\neq 0$ より，$p^2-3q^2=1$ かつ $3p^2-q^2=1$　$\therefore q^2=-\dfrac{1}{4}$

q は実数だから，不適。

$\alpha^3=\overline{\alpha}$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\alpha$ の場合

$p=p(p^2-3q^2)$ かつ $-q=q(3p^2-q^2)$ が成り立つ。

$p=p(p^2-3q^2)$ において，

$p=0$ とすると，$-q=q(3p^2-q^2)$ より，$q=q^3$　$\therefore q=1$　$(\because q>0)$

これと②より，$(\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta)=(i,\ -i,\ -1),\ (i,\ -i,\ 0),\ (i,\ -i,\ 1)$

それぞれ①に代入し計算することにより，

$f(x)=x^3+x^2+x+1,\ x^3+x,\ x^3-x^2+x-1$　・・・⑥

$p\neq 0$ とすると，$p^2-3q^2=1$ かつ $3p^2-q^2=-1$　$\therefore q^2=-\dfrac{1}{2}$

q は実数だから，不適。

よって，条件を満たす 3 次式は，④，⑤，⑥より，

$x^3+1,\ x^3-1,\ x^3+x,\ x^3+x^2+x+1,\ x^3-x^2+x-1$

解法 2：因数の積にして求める

A を $f(x)=0$ の複素数解とすると，

$f(A)=A^3+aA^2+bA+c=0$

$$
\begin{aligned}
f(\overline{A}) &= (\overline{A})^3+a(\overline{A})^2+b\overline{A}+c \\
&= \overline{A^3}=a\overline{A^2}+b\overline{A}+c \\
&= \overline{A^3+aA^2+bA+c} \\
&= \overline{0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって，共役複素数 $\overline{A}$ も $f(x)$ の解である。

また， A が虚数ならば $A\neq\overline{A}$ ，実数ならば $A=\overline{A}$

これと 3 次方程式の複素数解の数は，重解を 2 つの解とすると，3 であることから，

$f(x)=0$ は(B)より，互いに共役な 2 つの虚数解と 1 つの実数解をもつ。

そこで，虚数解を $\alpha,\ \overline{\alpha}$ ，実数解を β とすると，

β^3 は実数だから，条件より， $\beta^3=\beta$　$\therefore \beta=0,\ \pm1$　・・・①

α^3 と $(\overline{\alpha})^3$ については，

α^3 と $(\overline{\alpha})^3$ が実数ならば $\alpha^3=(\overline{\alpha})^3=\beta$

α^3 と $(\overline{\alpha})^3$ が虚数ならば（$\alpha^3=\alpha$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\overline{\alpha}$ ）または（$\alpha^3=\overline{\alpha}$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\alpha$ ）

そこで, 条件を満たす 3 次式を $\alpha^3=(\overline{\alpha})^3=\beta$, $\alpha^3=\alpha$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\overline{\alpha}$, $\alpha^3=\overline{\alpha}$ かつ $(\overline{\alpha})^3=\alpha$ の 3 つの場合に分けて求めることにする。

$\alpha^3=(\overline{\alpha})^3=\beta$ の場合

①より， $\beta=0,\ -1,\ 1$ だから，

$\beta=0$ のとき

$\alpha=\overline{\alpha}=0$ より， α が虚数であることに反するから不適。

$\beta=1$ のとき

$\alpha^3=1$ すなわち $\alpha^3-1=0$ より， $(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha^2+\alpha+1=0$ の解は $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ だから，

$\alpha,\ \overline{\alpha}$ を解にもつ 2 次方程式は $x^2+x+1=0$

また， $\beta=1$ を解にもつ 1 次方程式は $x-1=0$

よって，これらを解にもつ 3 次方程式は $(x-1)(x^2+x+1)=0$

すなわち $x^3-1=0$　・・・②

$\beta=-1$ のとき

$\beta=1$ のときと同様にして，3 次方程式は $x^3+1=0$ の解　・・・③

$\alpha^3=\alpha,\ (\overline{\alpha})^3=\overline{\alpha}$ の場合

$\alpha^3-\alpha=\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)=0$ より， $\alpha=0,\ \pm1$

α が虚数であることに反するから不適

$\alpha^3=\overline{\alpha},\ (\overline{\alpha})^3=\alpha$ の場合

$\dfrac{\alpha^3}{\alpha}=\dfrac{\overline{\alpha}}{(\overline{\alpha})^3}$ より，$\alpha^2=\dfrac{1}{(\overline{\alpha})^2}$

よって，$\alpha^2(\overline{\alpha})^2=1$ すなわち $(\alpha\overline{\alpha})^2=1$　$\therefore \alpha\overline{\alpha}=\pm 1$

ここで，$\alpha=p+qi$（p,q は実数，$q\neq 0$）とおくと，$\alpha\overline{\alpha}=p^2+q^2>0$

よって，$\alpha\overline{\alpha}=1$

よって，$\alpha^3=\overline{\alpha}$ を $\alpha^4=\alpha\overline{\alpha}$ と変形することにより，$\alpha^4=1$

これより，$(\alpha^2+1)(\alpha^2-1)=0$　$\therefore \alpha=\pm i$

よって，$\alpha,\ \overline{\alpha}$ は $x^2+1=0$ の解

また，①より，β を解にもつ 1 次方程式は $x=0,\ x\pm 1=0$

よって，条件を満たす 3 次方程式は $x(x^2+1)=0,\ (x\pm 1)(x^2+1)=0$

すなわち $x^3+x=0,\ x^3+x^2+x+1=0,\ x^3-x^2+x-1=0$　・・・④

以上より，条件を満たす 3 次式は，②，③，④より，

$x^3+1,\ x^3-1,\ x^3+x,\ x^3+x^2+x+1,\ x^3-x^2+x-1$